Zad. M 15A	I PRACOWNIA FIZYCZNA Instytut Fizyki US
Temat:	**Wahadło Oberbecka – badanie ruchu obrotowego**

Cel: zapoznanie studenta z kinematyką ruchu obrotowego jednostajnie zmiennego. Wyznaczenie prędkości średniej i przyśpieszenia średniego w ruchu obrotowym. Wykształcenie u studenta samodzielnego posługiwania się aparaturą pomiarową. Nabranie umiejętności prawidłowego opracowanie danych pomiarowych, interpretacji wyników pomiarów, wykonania wykresów badanych zależności, obliczenia i analizy niepewności pomiaru.

Przyrządy: wahadło Oberbecka, nitka, 2 bloczki stałe o małej masie do przerzucenia nitki, ciężarki, stoper o rozdzielczości 0,01 s, (dokładność 0,05 s), fotobramka z przełącznkiem STOP-START, taśma miernicza zwijana klasy II.

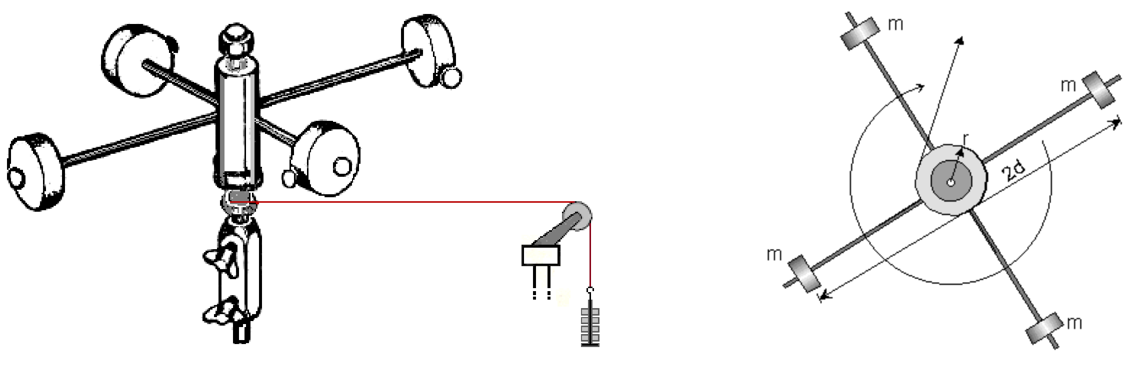
1. ZAGADNIENIA

1. Pojęcia i wielkości opisujące ruch obrotowy. Kąt, prędkość kątowa jako wielkości wektorowe. Ruch jednostajnie przyśpieszony.
2. Model bryły sztywnej. Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego.
3. Opracowanie karty pomiarowej.

2. OPIS ZAGADNIENIA

A. Opis układu doświadczalnego

Wahadło Oberbecka (rys. 1) stanowi bryłę sztywną utworzoną przez tuleję – korpus w kształcie walca, który może się obracać wokół osi symetrii i cztery wkręcone w nią pręty stalowe. Tuleja, wyposażona na końcach w łożyska kulkowe, jest osadzona obrotowo na stalowej osi, która za pomocą łącznika prostego została umocowana na pręcie statywu. Na pręty wahadła są nałożone obciążniki zaopatrzone w śruby zaciskowe. Można je przesuwać na prętach i unieruchomić w dowolnej odległości od osi obrotu. Stanowią one elementarne masy. Rozmieszczenie ich względem osi obrotu powodować będzie zmiany momentu bezwładności wahadła i decyduje o charakterze ruchu obrotowego (mniejsze lub większe przyśpieszenie). Na końcach prętów znajdują się nakrętki, które zabezpieczają przed zsunięciem się obciążników podczas wirowania przyrządu. Tuleja ma na końcach dwa wgłębienia tzw. szpulka,



a) b)

Rys. 1. Wahadło Oberbecka, widok: a) z boku z bloczkiem i przerzuconą przez bloczek nitką z ciężarkiem; b) z góry z zaznaczonym promieniem i przesuwnymi ociążnikami znajdującymi się w odległości *d* od osi obrotu.

na którą nawija się nić, o średnicach 30 mm i 15 mm. Nitki przywiązuje się do haczyków na szpulkach mniejszych lub zaczepia w otworze na boku większej szpulki. Na drugim końcu zawiesza się ciężarki.

Nić przerzuca się przez bloczek i obciąża ciężarkiem, a wtedy moment siły naciągu nici wprawia wahadło w ruch obrotowy. Z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego wiadomo, że ruch powinien być jednostajnie przyspieszonym. Zatem zależność zakreślonego kąta α przez bryłę od czasu jest postaci

$$\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon t^2, \tag{1}$$

natomiast prędkość kątowa ω zmienia się liniowo

$$\omega = \varepsilon t. \tag{2}$$

We wzorach (1) i (2) przyjęliśmy, że wahadło jest wprawiane w ruch w chwili czasu $t = 0$.

3. PRZEBIEG WYKONANIA ĆWICZENIA

A. Metoda pomiarów.

Dla zbadania charakeru ruchu, czy faktycznie ruch jest opisany powyższymi równaniami należy mieć wartości zakreślonego kąta przez bryłę w danych przedziałach czasu. W tym celu na jednym z prętów jest znacznik – przesłona dla fotobramki, która jest podłączona przez przystawkę do stopera o dokładności 0,05 s. Pręt ze znacznikiem ma być w takim położeniu aby ruszając załączał stoper [4]. Zwolnienie przyrządu musi być jednoczesne z włączeniem stopera. Pomiar czasu należy wykonać dla pełnych obrotów bryły. Oznaczmy przez n całkowitą liczbę obrotów bryły w czasie t_n (n = 1, 2, 3, …) wówczas zakreślony kąt jest równy

$$\alpha_n = n \cdot 2\pi. \tag{3}$$

Ponieważ ruch nie jest jednostajny, więc prędkość będzie się zmieniać. Dlatego należy posłużyć się wartościami średnimi, liczonymi dla czasów w ustalonych odstępach czasu. Jeśli będziemy mieć czasy t_n , to najmniejszym przedziałem czasu jest $\Delta t_{1,n} = t_{n+1} - t_n$ dla odstępu czasu między dwoma kolejnymi zliczeniami czasów obrotu, podwójnym przedziałem czasu jest $\Delta t_{2,n} = t_{n+1} - t_{n-1}$ odstęp czasu między trzema kolejnymi zliczeniami czasów obrotu, itd. W doświadczeniu wskazane jest wybranie najmniejszego odstępu czasu, jednak gdyby odstęp był za krótki należy wybrać odstęp czasu $\Delta t_{2,n}$. Dla prostoty w zapisach weźmiemy odstęp czasu $\Delta t_{2,n}$ gdzie dalej indeks „2” pominiemy.

Prędkość kątowa średnia dla przedziału czasu $\Delta t_{2,n} = \Delta t_n = t_{n+1} - t_{n-1}$ jest równa

$$\omega_n = \frac{\Delta\alpha_n}{\Delta t_n} = \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}}{t_{n+1} - t_{n-1}}. \tag{4}$$

Podstawiając (3) otrzymujemy

$$\omega_n = \frac{4\pi}{\Delta t_n}. \tag{5}$$

Zauważmy, że w ruchu jednostajnie przyśpieszonym wartość średnia prędkości kątowej w przedziale czasu między obrotem $n - 1$ a $n + 1$ jest równa wartości chwilowej w momencie czasu t_n.

Przyśpieszenie kątowe w przedziale czasu Δt_n obliczymy podobnie

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta\omega_n}{\Delta t_n} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_{n-1}}{t_{n+1} - t_{n-1}}. \tag{6}$$

Z powyższego widać, że pomiary sprowadzają się do pomiaru czasu. Dlatego należy tak zaplanować pomiary – ich wielokrotność, aby względne niepewności związane z wyznaczeniem wartości średnich nie przekraczały 5 %.

Znając średnicę szpuli możemy obliczyć drogę tj. wysokość h_n jaką ciężarek przebędzie w czasie t_n – czas całego ruchu. Wysokość tą możemy zmierzyć niezależnie. Stąd możemy obliczyć przyśpieszenie średnie na całej drodze ruchu ciężarka. Ponieważ między obu przyśpieszeniami jest związek

$$\varepsilon = \frac{a}{r}, \tag{7}$$

więc możemy porównać wartości wyznaczanych przyśpieszeń kątowych.

Przygotuj tabelę pomiarową.

B. Wykonanie doświadczenia.

1. Rozmieścić symetrycznie przesuwne obciążniki na prętach krzyżaka wahadła Oberbecka, wybrać dogodną ich odległość od osi obrotu lub wg decyzji prowadzącego.
2. Za pomocą suwmiarki zmierzyć (kilka razy) średnice szpul na które nawijana jest nić.
3. Do końca nitki, zaczepionej do jednej ze szpul i przerzuconej przez bloczek podwiesić ciężarek (20 g, 50 g lub większy – odpowiednio dobrać).

Uwaga: sprawdzić długość nitki – ciężarek w najniższym położeniu powinien być kilka cm nad podłogą aby w nią nie uderzał. Dla bezpieczeństwa na podłodze, pod ciężarkiem, położyć elastyczną podkładkę.

4. Obrócić ramiona przyrządu tak, aby znacznik umieszczony na brzegu jednego z ramion znalazł się przy fotobramce. Zwolnienie przyrządu musi być jednoczesne z włączeniem stopera. Zliczyć liczbę pełnych obrotów przyrządu od maksymalnej do minimalnej wysokości ciężarka.
5. Przećwiczyć zwalnianie przyrządu i pomiar czasu oraz nawijanie nici na szpulę tak aby zwoje nitki były obok siebie – nitki nie powinny zachodzić na siebie.

Uwaga: zatrzymanie stopera dla większej niż jeden liczby obrotów następuje poprzez przełączanie przycisków na przystawce do której jest podłączona fotobramka, przyciski STOP i START.

6. Wybrać sposób pomiaru czasu – czy dla kolejnych pełnych obrotów przyrządu czy dla co trzeciego obrotu lub wg decyzji prowadzącego zajęcia.
7. Dokonać pomiaru czasów. Pomiary powtórzyć kilkakrotnie wg przyjętego planu i dokładności.

Uwaga. Pomiary czasu można dokonywać też ręcznie przez zastosowanie stopera z międzyczasami – w takie są wyposażone tel. komórkowe i z nich można skorzystać o ile rozdzielczość jest odpowiednia.

8. Dokonać pomiaru wysokości spadku ciężarka dla maksymalnej liczby obrotów.
9. Powtórz pomiary dla ciężarka o większej masie lub dla innego rozstawu obciążników na prętach krzyżaka przyrządu – wg decyzji prowadzącego zajęcia.
10. Powtórz pomiary dla drugiej szpuli o innej średnicy.

    W tym przypadku należy zmienić bloczek na drugi o odpowiednio dobranej odległości płaszczyzny obrotu krążka od osi obrotu wahadła Oberbecka.

4. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

A. Przedstawienie zależności, wyznaczenie wartości pomiarowych i niepewności pomiaru.

1. Obliczyć potrzebne wartości średnie wielkości: r, h, t_n, wybrane międzyczasy $\Delta t_{1,n}$ czy $\Delta t_{2,n}$, t_n^2, ω_n, ε_n, $a = 2h/t_n^2$, odchylenia standardowe, niepewności pomiaru.
2. Celem zbadania zależności – $\alpha = f(t^2)$, $\omega = f(t)$, $\varepsilon = f(t)$, zaznacz na papierze milimetrowym punkty odpowiadające wartościom a) $((t_{i,\text{śr}})^2, \alpha_i)$ – w układzie współrzędnych (t^2, α);

   b) $(t_{i,\text{śr}}, \omega_i)$; c) $(t_{i,\text{śr}}, \varepsilon_i)$.

   Poprowadź odręcznie półprostą między zaznaczonymi punktami. (W tym celu najlepiej jest skorzystać z przeźroczystej linijki i tak ją ułożyć aby zminimalizować odległości punktów od półprostej, ponadto dla pkt. a) i b) – punkt początkowy powinien być w początku układu współrzędnych.)

   Dla każdego z punktów zaznacz odcinki (krzyżyki) niepewności – tam gdzie to możliwe.

   Uwaga: dla $t = 0$, $\alpha = 0$ i $\omega = 0$ – ten punkt należy obowiązkowo zaznaczyć.
3. a) Z wykresów z p. 2 a) i b) wyznacz wartość współczynnika nachylenia półprostej do osi odciętych.
   b) Z wykresu z p. 2 c) wyznacz wartość punktu przecięcia prostej z osią rzędnych.
4. Stosując metodę regresji liniowej – komputerowo, wyznaczyć współczynnik nachylenia prostej.

5. Korzystając z arkusza kalkulacyjnego utwórz wykres dla zależności: $\alpha = f(t^2)$, $\omega = f(t)$, $\varepsilon = f(t)$ z zaznaczeniem krzyżyków (odcinków) niepewności (tzw. słupki błędu w żargonie komputerowym).
6. Oszacuj zgodność badanych zależności z oczekiwaną liniową – oblicz współczynnik korelacji liniowej Pearsona (patrz Dodatek).
7. a) Oszacuj niepewność pomiaru wartości przyśpieszenia kątowego ε na podstawie wykresów z p. 2.
   b) Oblicz niepewność pomiaru wartości przyśpieszenia linowego a na podstawie wzoru $a = 2h/t_n^2$;
   c) Oblicz niepewność pomiaru wartości przyśpieszenia kątowego ε na podstawie wzoru (7).
8. Oblicz, korzystając z arkusza kalkulacyjnego, niepewność parametrów prostej dla regresji liniowej z p. 5.

Uwaga: zakres opracowania określa prowadzący zajęcia.

B. Zestawienie wyników i niepewności pomiaru.

C. Dokonać dyskusji wyników, porównać otrzymane zależności i wartości, zapisać wnioski i uwagi dotyczące doświadczenia.

Korzystając z przedziałowego *kryterium zgodności wyników pomiarów* porównaj obliczone wartości przyśpieszenia kątowego ε.

Wskazać źródła ewentualnych odstępstw od oczekiwanej zależności, gdzie są największe niepewności pomiaru.

W arkuszu kalkulacyjnym jest wykorzystana tzw. normalna metoda najmniejszych kwadratów – na ile ta metoda, w porównaniu do prostej regresji ortogonalnej (zastosowanej w p. 2), jest uzasadniona.

LITERATURA

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Podstawy fizyki*. Warszawa, PWN, 2007 lub inne wydanie.
2. Wahadło Oberbecka. http://dydaktyka.fizyka.szc.pl/eopis.php?wyswietl=eksperyment&id=115
3. Chronograf głośnikowy http://dydaktyka.fizyka.szc.pl/eopis.php?wyswietl=eksperyment&id=68
4. Instrukcja obsługi *Stoper demonstracyjny* – http://www.dydaktyka.fizyka.szc.pl/pdf/pdf_19.pdf
   Skrócony opis jest w Instrukcji do: *II zasada dynamiki Newtona, doświadczalne potwierdzenie zależności a*(*F*) – http://dydfiz.univ.szczecin.pl/pdf/pdf_271.pdf

Dodatek

Niepewność pomiaru

Niepewność całkowita wielkości x mierzonej bezpośrednio:

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \frac{(\Delta_d x)^2}{3} + u_e^2(x)} \qquad \text{(A)}$$

gdzie

pierwszy składnik pod pierwiastkiem – niepewność standardowa średniej (niepewność typu A);

następnymi przyczynkami niepewności pomiaru (niepewności typu B – wg Przewodnika GUM, przypis poniżej) są:

$\Delta_d x$ – niepewność wzorcowania (niepewność wynikająca z dokładności przyrządu)

$u_e(x)$ – niepewność standardowa eksperymentatora.

Złożoną niepewność standardową $u(y)$ – niepewność dla funkcji kilku zmiennych $y = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ oblicza się korzystając z prawa przenoszenia niepewności pomiarów bezpośrednich.

Obliczanie niepewności $u(y)$ można dokonać bez odwoływania się do rachunku różniczkowego korzystając z metody elementarnej – wzoru zalecanego przez *Przewodnik GUM* [1] poprzez obliczanie *udziałów niepewności*

[1] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1993, 1995; (dokument wydany w imieniu BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OML). Fundamentalny dokument zbiorowego autora – zespołu międzynarodowych organizacji naukowo-technicznych – dla ustanowienia procedury wyrażania niepewności pomiaru, jest wydany przez

$$u_i(y) = \frac{1}{2}\left| f(x_1, \ldots, x_i + u(x_i), \ldots, x_N) - f(x_1, \ldots, x_i - u(x_i), \ldots, x_N)\right| \tag{B}$$

($u_i(y)$ – zmiana wartości funkcji f spowodowana zmianą x_i o $+u(x_i)$ i o $-u(x_i)$).
i obliczanie $u(y)$ jako sumy geometrycznej udziałów:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)}\,. \tag{C}$$

W przypadku gdy zależność funkcyjna dla f ma postać jednomianu: $y = c\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, c – stała, wówczas wygodnie jest korzystać z prawa propagacji niepewności względnych[2]

$$\frac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\, u_r(x_i)\right]^2}\ , \tag{D}$$

gdzie $u_r(x_i) \equiv u(x_i)/|x_i|$ – względna niepewność pomiaru wielkości x_i.

Porównywanie wyników

Chcąc porównać otrzymane wyniki z innym wynikiem, np. tablicowym x^T, korzystamy z przedziałowego ***kryterium zgodności wyników pomiarów***, czyli sprawdzamy czy dla naszych wyników spełniona jest nierówność:

$$\left|\bar{x} - x^T\right| \le u(\bar{x}) + u(x^T)\,. \tag{E}$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, należy zastąpić niepewność u przez *niepewność rozszerzoną U*, gdzie $U(x) = ku(x)$ a współczynnik k, w naszym przypadku należy przyjąć 2. Jeśli i wówczas ta nierówność nie jest spełniona to znaczy, że wyniki nie są zgodne.

Obie niepewności są powiązane zależnością $U = ku$, gdzie k – współczynnik rozszerzenia. Współczynnik rozszerzenia k zależny jest od liczby pomiarów oraz poziomu ufności (określany jest często mianem *współczynnika Studenta-Fishera* $t_{n,a}$), w większości przypadków przyjmujemy $k = 2$

Regresja liniowa – klasyczna (metoda najmniejszych kwadratów)

Jeżeli pomiędzy dwiema wielkościami fizycznymi występuje zależność liniowa to regresja liniowa jest prostą metodą wyznaczenia parametrów najlepiej dopasowanej prostej. Parametry prostej określonej równaniem $\boldsymbol{y = mx + b}$ wyznaczamy przy użyciu ogólnie dostępnych (dość złożonych) wzorów.

Wartości współczynników charakteryzujących prostą dla regresji liniowej szybko otrzymamy korzystając z funkcji wbudowanych w arkuszu kalkulacyjnym.

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona r – bezwymiarowy wskaźnik z przedziału [–1, 1] określający stopień liniowej zależności dwóch zestawów danych. Składnia w Excelu: =PEARSON(tablica1;tablica2).

Współczynniki regresji liniowej, składnia w Excelu:

m: =NACHYLENIE(*znane_y*;*znane_x*);   *b*: =ODCIĘTA(*znane_y*;*znane_x*)

Uwaga: zwrócić uwagę, że na pierwszym miejscu jest „*y*” a na drugim „*x*”.

Wartości: m i b, $u_A(m)$ i $u_A(b)$ oraz r^2 i $u(r)$ otrzymamy korzystając z bardziej wszechstronnej funkcji tablicowej REGLINP, która zwraca tablicę wartości. Składnia: =REGLINP(*znane_y*;*znane_x*;*stała*;*statystyka*).

Stała – argument opcjonalny; domyślna wartość PRAWDA oznacza normalne liczenie wartości wpółczynnika b; wartość FAŁSZ wymusza , to stała $b = 0$ (wartość m jest dopasowana do danych tak, aby spełnić równanie $y = mx$), tak jest w naszym przypadku.

Statystyka – argument opcjonalny. Jeżeli dla wyświetlenia wartości funkcji oznaczymy obszar „2 kolumny na 2 wiersze (3 wiersze)” i wartością jest:

– PRAWDA, to funkcja w kolejnych wierszach zwraca kolejno: m i b, $u_A(m)$ i $u_A(b)$ – przy zaznaczeniu obszaru z 2 wierszami (oraz r^2 i $u(r)$ przy zaznaczeniu obszaru z 3 wierszami).

– FAŁSZ lub argument został pominięty, to funkcja zwraca jedynie wartości współczynników m i b.

Aby użyć funkcję REGLINP trzeba: (i) zaznaczyć obszar w którym ma się znaleźć wynik; (ii) wpisać nazwę funkcji; (iii) zatwierdzić jej wprowadzanie kombinacją klawiszy *Ctrl+Shift+Enter*.

Na temat wszystkich statystyk, generowanych przez funkcję REGLINP można przeczytać w Pomocy.

Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) Publikacja jest udostępniona online: http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

[2] Niepewność względna w *Przewodniku GUM* nie ma oddzielnego oznaczenia. W sytuacjach nie powodujących nieporozumień można stosować zapis z indeksem dolnym „r” tj. $u_r(y) \equiv u(y)/y$.